5. Интеграција на производу простора

Читаоцу је свакако познат следећи резултат интегралног рачуна у $\mathbb{R}^d$. Ако је f непрекидна функција на правоугаонику $[a,b]\times[c,d]$, онда је

$$\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx=\int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dxdy=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy.$$

Наш циљ је да пренесемо ово тврђење на интеграле у смислу Lebesgue-a. Да би уопште имали теорију интеграције функција од две промењиве $f(x,y)$, $x\in X$, $y\in Y$, потребно је да имамо мерљиве скупове на производу $X\times Y$, тј. σ алгебру на $X\times Y$ и одговарајућу меру на тој σ алгебри. Приступимо реализацији овог програма.

5.1. Мерљиви скупови и мерљиве функције на $X\times Y$. У почетку нам неће бити потребне мере, за почетак радимо са мерљивим просторима $(X,\mathfrak{M})$ и $(Y,\mathfrak{N})$. Скупове облика $E\times F$, где је $E\in\mathfrak{M}$, а $F\in\mathfrak{N}$, ћемо звати **мерљивим правоугаоницима**. Како је према ставу 3.1 производ две полуалгебре полуалгебра, видимо да је фамилија свих мерљивих правоугаоника у ствари производ полуалгебра $\mathfrak{M}\ltimes\mathfrak{N}$ на $X\times Y$. Из става 3.2 следи да је фамилија $\mathcal{A}_{\mathfrak{M}\ltimes\mathfrak{N}}$ свих коначних унија међусобно дисјунктних мерљивих правоугаоника алгебра скупова на $X\times Y$.

Дефиниција 4.10. *Минималну σ алгебру $\mathfrak{S}_{\mathfrak{M}\ltimes\mathfrak{N}}$ која садржи полуалгебру $\mathfrak{M}\ltimes\mathfrak{N}$ мерљивих правоугаоника зовемо* ***производом сигма алгебри*** *$\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ и означавамо са $\mathfrak{M}\times\mathfrak{N}$.*

Еквивалентно, $\mathfrak{M}\times\mathfrak{N}$ је минимална σ алгебра $\mathfrak{S}_{\mathcal{A}_{\mathfrak{M}\ltimes\mathfrak{N}}}$ која садржи алгебру $\mathcal{A}_{\mathfrak{M}\ltimes\mathfrak{N}}$.

Ако је $A\subset X\times Y$ онда, за $x\in X$, односно $y\in Y$ уводимо **x-засек**, односно **y-засек** скупа A формулама

$$A_x=\{y\in Y:(x,y)\in A\},\quad A^y=\{x\in X:(x,y)\in A\}.$$

Ако је f функција на $X\times Y$, онда уводимо функције f_x на Y и f^y на X формулама

$$f_x(y)=f(x,y),\quad f^y(x)=f(x,y).$$

Ови појмови су везани на следећи начин: $(\chi_A)_x=\chi_{A_x}$ и $(\chi_A)^y=\chi_{A^y}$. Следећа својства, као и аналогна "по $y\in Y$", непосредно следе из дефиниција и биће даље често коришћена.

$$\begin{array}{rcl}
\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)_x=\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n)_x & , & (A\setminus B)_x=A_x\setminus B_x\\
A_n\uparrow A\Rightarrow(A_n)_x\uparrow A_x & , & A_n\downarrow A\Rightarrow(A_n)_x\downarrow A_x\\
f_n\uparrow f\Rightarrow(f_n)_x\uparrow f_x & , & f_n\downarrow f\Rightarrow(f_n)_x\downarrow f_x\\
(\alpha f+\beta g)_x=\alpha f_x+\beta g_x & , & (\Re e f)_x=\Re e f_x,(\Im m f)_x=\Im m f_x\\
(f^+)_x=f_x^+,(f^-)_x=f_x^- & , & \text{итд.}
\end{array}$$

Лема 4.25. ***Ако $A\in\mathfrak{M}\times\mathfrak{N}$, онда $A_x\in\mathfrak{N}$ за свако $x\in X$ и $A^y\in\mathfrak{M}$ за свако $y\in Y$.***

Одаберимо $x \in X$ и нека је $\mathfrak{S}_x = \{B \subset X \times Y : B_x \in \mathfrak{N}\}$. Ако је

△ Одаберимо $x \in X$ и нека је $\mathfrak{S}_x = \{B \subset X \times Y : B_x \in \mathfrak{N}\}$. Ако је $P_x = F \in \mathfrak{N}$ за $x \in E$ и $P_x = \emptyset \in \mathfrak{N}$ за $P = E \times F$ мерљив правоугаоник, онда је $x \notin E$, па видимо да $P \in \mathfrak{S}_x$. Дакле, $\mathfrak{S}_x$ садржи све мерљиве правоугаонике, тј. $\mathfrak{S}_x \supset \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$. С друге стране, из горњих релација следи да је $\mathfrak{S}_x$ сигма алгебра, па зато садржи $\mathfrak{S}_{\mathfrak{M}\times\mathfrak{N}} = \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$. Дакле, $A_x \in \mathfrak{N}$ за свако $x \in X$, а слично се доказује и $A^y \in \mathfrak{M}$ за свако $y \in Y$. □

Став 4.26. *Нека је f мерљива функција на $X \times Y$ (значи, мерљива у односу на σ алгебру $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$) која узима вредности у $\overline{\mathbb{R}}$ или у $\mathbb{C}$. Тада је за свако $x \in X$ функција f_x мерљива у односу на $\mathfrak{N}$, а за свако $y \in Y$ функција f^y је мерљива у односу на $\mathfrak{M}$.*

△ Ако је V отворен скуп у $\overline{\mathbb{R}}$ или $\mathbb{C}$, тада је $f^{-1}(V) \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$, па из

$$f_x^{-1}(V) = \{y \in Y : f_x(y) \in V\} = \{y \in Y : f(x,y) \in V\} = (f^{-1}(V))_x$$

и претходне леме следи $f_x^{-1}(V) \in \mathfrak{N}$, а аналогно се утврђује и мерљивост f^y. □

5.2. Производ мера. Сада се и мере укључују у разматрање: надаље радимо са просторима са мером $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ и $(Y, \mathfrak{N}, \nu)$. Претпоставићемо да су обе мере σ коначне, то јест да постоје низови скупова $X_m \in \mathfrak{M}$ и $Y_m \in \mathfrak{N}$ такви да је $\mu(X_m) < +\infty$, $\nu(Y_m) < +\infty$ за свако $m \in \mathbb{N}$ и да $X_m \uparrow X$, $Y_m \uparrow Y$ кад $m \to \infty$.

Лема 4.27. *Ако су $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ и $(Y, \mathfrak{N}, \nu)$ простори са мерама, онда је производ мера $\mu\times\nu$ мера на производ алгебри $A_{\mathfrak{M}\times\mathfrak{N}}$. Ако су μ и ν обе σ коначне, таква је и $\mu \times \nu$.*

△ На основу става 3.7 довољно је доказати да је $\mu\times\nu$ мера на производу полуалгебри $\mathfrak{M}\times\mathfrak{N}$. Нека је дакле $E \times F = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n \times F_n$ за неке $E, E_n \in \mathfrak{M}$ и $F, F_n \in \mathfrak{N}$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Тада је за свако $x \in X$ и $y \in Y$ важи

$$\chi_E(x)\chi_F(y) = \chi_{E\times F}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n\times F_n}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n}(x)\chi_{F_n}(y),$$

одакле интеграцијом по мери μ према Beppo-Levi-јевом ставу имамо

$$\mu(E)\chi_F(y) = \int_X \chi_{E\times F}(x,y)\, d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)\chi_{F_n}(y)$$

за свако $y \in Y$. Поновна примена Beppo-Levi-јевог става на меру ν даје коначан закључак

$$(\mu \times \nu)\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n \times F_n\right) = \mu(E)\nu(F) = \int_Y \mu(E)\chi_F(y)\, d\nu(y) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \int_Y \chi_{F_n}\, d\nu(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)\nu(F_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (\mu \times \nu)(E_n \times F_n).$$

Ако су μ и ν обе σ коначне мере, за низове скупова $X_m \in \mathfrak{M}$ и $Y_m \in \mathfrak{N}$ такве да је $\mu(X_m) < +\infty$, $\nu(Y_m) < +\infty$ за свако $m \in \mathbb{N}$ и да $X_m \uparrow X$, $Y_m \uparrow Y$

кад $m \to \infty$, тада и $X_m \times Y_m \uparrow X \times Y$ кад кад $m \to \infty$, а $(\mu \times \nu)(X_m \times Y_m) = \mu(X_m)\nu(Y_m) < \infty$ за свако $m \in \mathbb{N}$. Дакле, заједно са μ и ν је и $\mu \times \nu$ једна σ конача мера на $\mathcal{A}_{\mathfrak{M}\times\mathfrak{N}}$. □

На основу теореме 3.23 се σ коначна мера $\mu \times \nu$ на $\mathcal{A}_{\mathfrak{M}\times\mathfrak{N}}$ једнозначно продужује до (такође σ коначне) мере (надаље исто обележене са $\mu \times \nu$) на $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$, за коју важи следећа:

ТЕОРЕМА 4.28. ***Ако за*** $A \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ ***дефинишемо функције***

$$\varphi(x) \overset{\text{def}}{=} \nu(A_x) \quad \text{за свако } x \in X \text{ и } \quad \psi(y) \overset{\text{def}}{=} \mu(A^y) \quad \text{за свако } y \in YX,$$

онда је $\varphi : X \to [0, +\infty]$ $\mathfrak{M}$***-мерљива, а*** $\psi : Y \to [0, +\infty]$ $\mathfrak{N}$***-мерљива и важи***

$$\boxed{(\mu\times\nu)(A) = \int_X \nu(A_x)\, d\mu(x) = \int_Y \mu(A^y)\, d\nu(y).}$$

△ Фиксирајмо $m \in \mathbb{N}$ и посматрајмо фамилију $\mathfrak{K}_m$ свих $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ мерљивих подскупова B простора $X \times Y$ таквих да је $\varphi_m(x) \overset{\text{def}}{=} \nu(B_x \cap Y_m) = \nu_{Y_m}(B_x)$ једна $\mathfrak{M}$ мерљива функција на X. Покажимо да $\mathfrak{K}_m$ има следећа три својства:

1$^\odot$ $\mathfrak{K}_m$ садржи све мерљиве правоугаонике,
2$^\odot$ Ако су $B_1, \cdots, B_n$ међусобно дисјунктни скупови из $\mathfrak{K}_m$, онда је и $\bigsqcup_{k=1}^n B_k$ из $\mathfrak{K}_m$,
3$^\odot$ $\mathfrak{K}_m$ је монотона фамилија.

Ако је $B = E \times F$ мерљив правоугаоник, онда је

$$\varphi_m(x) = \begin{cases} \nu(Y_m \cap F) = \nu_{Y_m}(F), & \text{за } x \in E, \\ 0, & \text{за } x \notin E, \end{cases}$$

па је $\varphi_m = \nu(Y_m \cap F)\chi_E = \nu_{Y_m}(F)\chi_E$ мерљива као проста функција, и за њу очигледно важи 1$^\odot$.

Затим, нека су $B_1, \cdots, B_n$ међусобно дисјунктни скупови из $\mathfrak{K}_m$ и нека је $B = \bigsqcup_{k=1}^n B_k$. Тада је $B_x \cap Y_m = \bigsqcup_{k=1}^n (B_k)_x \cap Y_m$ за свако $x \in X$, па коначна адитивност мере ν даје $\varphi_m(x) = \sum_{k=1}^n \nu_{Y_m}((B_k)_x)$, тако да је и она $\mathfrak{M}$ мерљива као збир $\mathfrak{M}$ мерљивих функција. То показује да 2$^\odot$ важи и за $B = \bigsqcup_{k=1}^n B_k$.

Пређимо на доказ својства 3$^\odot$: нека $B_n \uparrow B$, где је $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ низ скупова из $\mathfrak{K}_m$. Тада $(B_n)_x \cap Y_m \uparrow B_x \cap Y_m$ за свако $x \in X$, па непрекидност одоздо мере ν даје $\nu_{Y_m}((B_n)_x) \uparrow \nu_{Y_m}(B_x) = \varphi_m(x)$. Тако је и функција φ_m је $\mathfrak{M}$ мерљива као лимес функција које су $\mathfrak{M}$ мерљиве по претпоставци.

Слично, ако $B_n \downarrow B$, где је $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ из $\mathfrak{K}_m$, тада из $(B_n)_x \cap Y_m \downarrow B_x \cap Y_m$ за свако $x \in X$ и коначности мере ν_{Y_m} непрекидност одоздо мере ν_{Y_m} даје $\nu_{Y_m}((B_n)_x) \downarrow \nu_{Y_m}(B_x) = \varphi_m(x)$. Зато је и φ_m мерљива као гранична вредност низа $\mathfrak{M}$ мерљивих функција, па имамо да 3$^\odot$ важи и у овом случају.

Користећи 1$^\odot$ и 2$^\odot$ закључујемо да $\mathfrak{K}_m$ садржи и алгебру $\mathcal{A}_{\mathfrak{M}\times\mathfrak{N}}$, на основу 3$^\odot$ одатле добијамо да $\mathfrak{K}_m$ садржи и минималну монотону класу генерисану алгебром $\mathcal{A}_{\mathfrak{M}\times\mathfrak{N}}$, па нам лема о монотоним класама каже да $\mathfrak{K}_m$ садржи генерисану σ алгебру $\mathfrak{S}_{\mathfrak{M}\times\mathfrak{N}} = \mathfrak{S}_{\mathcal{A}_{\mathfrak{M}\times\mathfrak{N}}} = \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$.

Другим речима, све функције φ_n су $\mathfrak{M}$ мерљиве, а како због непрекидности одоздо мере ν имамо да $\varphi_m(x) = \nu(B_x \cap Y_m) \to \nu(B_x) = \varphi(x)$ кад $m \to \infty$ за свако $x \in X$, онда је и функција φ мерљива. Ово нам омогућава нам да дефинишемо

$$\lambda(A) \overset{\text{def}}{=} \int_X \nu(A_x)\, d\mu(x), \qquad \text{за свако } A \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{N},$$

Покажимо још да је и λ мера на $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ таква да је

$$\lambda(E \times F) = \mu(E)\nu(F), \qquad \text{за свака два скупа } E \in \mathfrak{M} \text{ и } F \in \mathfrak{N}. \tag{4.11}$$

Очито је $\lambda(\emptyset) = 0$. Нека је $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$, где је $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ низ међусобно дисјунктних скупова из $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$. Тада је, за свако $x \in X$, $A_x = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} (A_n)_x$, па је $\nu(A_x) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu((A_n)_x)$. Применом Beppo Levi-јевог става добијамо

$$\lambda(A) = \int_X \nu(A_x)\, d\mu(x) = \int_X \sum_{n=1}^{\infty} \nu((A_n)_x)\, d\mu(x)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_X \nu((A_n)_x)\, d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n),$$

чиме смо доказали да је λ мера. Јасно је да (4.11) важи за λ, па су онда мере λ и $\mu\times\nu$ једнаке на $\mathfrak{M}\times\mathfrak{N}$, а према ставу 3.3 и на генерисаној алгебри $\mathcal{A}_{\mathfrak{M}\times\mathfrak{N}}$. Како је $X \times Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \times Y_n$ и $\lambda(X_n \times Y_n) = (\mu\times\nu)(X_n \times Y_n) = \mu(X_n)\nu(Y_n) < \infty$ за свако $n \in \mathbb{N}$, закључујемо да су λ и $\mu\times\nu$ сигма коначне мере на $X \times Y$. Из теореме 3.23 о јединствености продужења сигма коначних мера следи да је $\lambda = \mu \times \nu$ и на $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$. Аналогно се показује да је $(\mu \times \nu)(A) = \int_Y \mu(A^y)\, d\nu(y)$ за свако $A \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$, чиме је доказ комплетиран. □

Претходна теорема је у суштини специјалан случај следеће, која носи име Fubini[3]-ја.

Подсетимо читаоца да и даље радимо са мерљивим просторима $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ и $(Y, \mathfrak{N}, \nu)$, где су обе мере σ коначне.

Теорема 4.29. [Fubini-ја] ***Нека је*** $f : X \times Y \to [0, +\infty]$ $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ ***мерљива функција. Тада су функције***

$$\varphi(x) \overset{\text{def}}{=} \int_Y f(x,y)\, d\nu(y) \quad \text{и} \quad \psi(y) \overset{\text{def}}{=} \int_X f(x,y)\, d\mu(x)$$

$\mathfrak{M}$***, односно*** $\mathfrak{N}$***, мерљиве и***

$$\int_{X\times Y} f\, d(\mu\times\nu) = \int_X \varphi\, d\mu = \int_Y \psi\, d\nu,$$

или, у развијеном облику,

$$\boxed{\int_{X\times Y} f(x,y)\, d(\mu\times\nu)(x,y) = \int_X \Big(\int_Y f(x,y)\, d\nu(y)\Big) d\mu(x) = \int_Y \Big(\int_X f(x,y)\, d\mu(x)\Big) d\nu(y).}$$

[3] Фубини– Guido Fubini (1879-1943)

△ У случају $f = \chi_A$, где је A неки $\mathfrak{M}\times\mathfrak{N}$ мерљив скуп, теорема се своди на претходну теорему 4.28. Затим, ако теорема важи за функције f и g, онда важи и за $h = \alpha f + \beta g$, где су α и β позитивни реални бројеви. Заиста,

$$\int_Y h(x,y)\,d\nu(y) = \alpha\int_Y f(x,y)\,d\nu(y) + \beta\int_Y g(x,y)\,d\nu(y)$$

је мерљива функција по $x \in X$ и

$$\begin{aligned}
\int_X\Big(\int_Y h(x,y)\,d\nu(y)\Big)d\mu(x) &= \int_X\Big(\alpha\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)+\beta\int_Y g(x,y)\,d\nu(y)\Big)d\mu(x)\\
&= \alpha\int_X\Big(\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\Big)d\mu(x) + \beta\int_X\Big(\int_Y g(x,y)\,d\nu(y)\Big)d\mu(x)\\
&= \alpha\int_{X\times Y} f\,d(\mu\times\nu) + \beta\int_{X\times Y} g\,d(\mu\times\nu) = \int_{X\times Y} h\,d(\mu\times\nu).
\end{aligned}$$

Аналогно се доказује једнакост за обрнут поредак интеграције. Сада можемо тврдити да теорема важи за све просте позитивне функције. Пређимо на општи случај: одаберимо растући низ простих позитивних функција $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ на $X\times Y$ који конвергира ка f тачка по тачка. Означимо са φ_n, односно ψ_n, функције које настају од s_n интеграцијом по Y, односно по X. Према доказаном φ_n и ψ_n су мерљиве и $\int_X \varphi_n\,d\mu = \int_{X\times Y} s_n\,d\mu\times\nu = \int_Y \psi_n\,d\nu$ за свако $n\in\mathbb{N}$. Из теореме о монотоној конвергенцији следи да $\varphi_n(x)\uparrow\varphi(x)$ за свако $x\in X$ и да $\psi_n(y)\uparrow\psi(y)$ за свако $y\in Y$, па су функције φ и ψ мерљиве. Примењујући опет теорему о монотоној конвергенцији добијамо

$$\int_X \varphi\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X \varphi_n\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_{X\times Y} s_n\,d\mu = \int_{X\times Y} f\,d(\mu\times\nu)$$

и аналогну једнакост за $\int_Y \psi\,d\nu$. □

Природно се поставља питање: шта ако је f комплексна функција из $\mathfrak{L}^1(\mu\times\nu)$? Претпоставимо прво да је f реална функција, тада је $f = f^+ - f^-$ при чему су f^+ и f^- позитивне и интеграбилне, па нам Fubini-јева теорема даје

$$\begin{aligned}
\int_X\Big(\int_Y f^+(x,y)\,d\nu(y)\Big)\,d\mu(x) &= \int_{X\times Y} f^+\,d(\mu\times\nu),\\
\int_X\Big(\int_Y f^-(x,y)\,d\nu(y)\Big)\,d\mu(x) &= \int_{X\times Y} f^-\,d(\mu\times\nu),
\end{aligned}$$

при чему су обе величине коначне. Зато је $\int_Y f^+(x,y)\,d\nu(y) < +\infty$ за скоро свако $x\in X$, исто важи и за f^-, па је за $[\mu]$ скоро свако $x\in X$ функција f_x из $\mathfrak{L}^1(\nu)$. Осим тога, $\int_Y f(x,y)\,d\nu(y) = \int_Y f^+(x,y)\,d\nu(y) - \int_Y f^-(x,y)\,d\nu(y)$ је $[\mu]$ скоро свуда дефинисана (осим у тачкама $x\in X$ где су оба последња интеграла бесконачна) и $\mathfrak{M}$ мерљива функција. Дакле, горње једнакости дају

$$\int_X\Big(\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\Big)\,d\mu(x) = \int_{X\times Y} f\,d(\mu\times\nu),$$

при чему је унутрашњи интеграл дефинисан за скоро свако $x \in X$ и задаје реалну $\mathfrak{M}$ мерљиву функцију интеграбилну по мери μ. Наравно, исто важи и за интеграцију у обрнутом поретку.

Теорема 4.30. [Tonelli[4]-ја] *Нека је $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ интеграбилна функција. Тада је, за $[\mu]$ скоро свако $x \in X$, $f_x : Y \to \mathbb{C}$ задана са $f_x(y) \overset{\text{def}}{=} f(x,y)$ функција из простора $\mathfrak{L}^1(\nu)$; аналогно, за $[\nu]$ скоро свако $y \in Y$ функција $f^y : X \to \mathbb{C}$ задана са $f^y(x) \overset{\text{def}}{=} f(x,y)$ припада $\mathfrak{L}^1(\mu)$. Затим,*

$$\varphi(x) \overset{\text{def}}{=} \int_Y f(x,y)\,d\nu(y) = \int_Y f_x\,d\nu \qquad \text{и}$$
$$\psi(y) \overset{\text{def}}{=} \int_X f(x,y)\,d\mu(x) = \int_X f^y\,d\mu$$

су $[\mu]$, односно $[\nu]$ скоро свуда дефинисане мерљиве функције интеграбилне по μ, односно по ν и

$$\int_{X\times Y} f\,d(\mu\times\nu) = \int_X \varphi\,d\mu = \int_Y \psi\,d\nu.$$

Дакле, интеграција интеграбилне функције од две променљиве се своди на поновљену интеграцију, у било ком поретку.

△ Претходно разматрање је показало да теорема важи за реалне интеграбилне функције. Општи случај се своди на реалан стандардним разлагањем $f = f_{\Re} + i f_{\Im}$, а детаље препуштамо читаоцу. □

Примедба 4.31. Да би се могла применити Tonelli-јева теорема, треба прво проверити да $f \in \mathfrak{L}^1(\mu\times\nu)$, дакле да је интеграл $\int_{X\times Y} |f|\,d(\mu\times\nu)$ коначан, где често интервенише Fubini-јева теорема.

Примедба 4.32. Користећи горње резултате могуће је индуктивно дефинисати производ $\mu_1 \times \mu_2 \times \cdots \times \mu_n = \mu$ сигма коначних мера и доказати одговарајуће теореме Fubini-ја и Tonelli-ја о интеграцији по мери μ у произвољном поретку променљивих.

теор ... Шта нам ...ји говоре о сумирању двојних редова?

6. Интеграција у $\mathbb{R}^d$

Нека m_d означава меру Lebesgue-а у $\mathbb{R}^d$, посматрану на σ алгебри Borel-ових скупова у $\mathbb{R}^d$. Показаћемо да је $m_r \times m_s = m_{r+s}$ за свака два природна броја r, s. Следећи став решава проблем области дефинисаности мере $m_r \times m_s$.

СТАВ 4.33. *За свака два природна броја r и s имамо $\mathfrak{B}^r \times \mathfrak{B}^s = \mathfrak{B}^{r+s}$.*

Подсетимо се да је $\mathfrak{B}^r \times \mathfrak{B}^s$ минимална σ алгебра која садржи све мерљиве правоугаонике $E \times F \subset \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s = \mathbb{R}^{r+s}$, где је $E \in \mathfrak{B}^r$, а $F \in \mathfrak{B}^s$.

$\triangle$ Докажимо прво да је $E \times \mathbb{R}^s$ Borel-ов скуп у $\mathbb{R}^{r+s}$ кад год је E Borel-ов скуп у $\mathbb{R}^r$. Заиста, нека је $\mathfrak{S}_r = \{E \subset \mathbb{R}^r : E \times \mathbb{R}^s \in \mathfrak{B}^{r+s}\}$. Остављамо читаоцу рутинску проверу чињенице да је $\mathfrak{S}_r$ сигма алгебра скупова на $\mathbb{R}^r$. С обзиром да је $Q \times \mathbb{R}^s$ основни квадар у $\mathbb{R}^{r+s}$ кад год је $Q \in \mathfrak{I}^r$ основни квадар у $\mathbb{R}^r$, видимо да $\mathfrak{S}_r$ садржи полуалгебру $\mathfrak{I}^r$ основних квадара у $\mathbb{R}^r$, па тиме и минималну σ алгебру $\mathfrak{S}_{\mathfrak{I}^r} = \mathfrak{B}^r$ Borel-ових скупова у $\mathbb{R}^r$. Тиме смо доказали полазно тврђење.

Слично је и $\mathbb{R}^r \times F$ Borel-ов скуп у $\mathbb{R}^{r+s}$ кад год је F Borel-ов скуп у $\mathbb{R}^s$. Следи да је $E \times F = (E \times \mathbb{R}^s) \cap (\mathbb{R}^r \times F)$ Borel-ов скуп у $\mathbb{R}^{r+s}$ кад год је $E \in \mathfrak{B}^r$, $F \in \mathfrak{B}^s$. Дакле, σ алгебра $\mathfrak{B}^{r+s}$ садржи производ полуалгебру $\mathfrak{B}^r \ast \mathfrak{B}^s$ мерљивих правоугаоникау $\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s$, па тиме и минималну σ алгебру $\mathfrak{S}_{\mathfrak{B}^r \ast \mathfrak{B}^s} = \mathfrak{B}^r \times \mathfrak{B}^s$.

Како σ алгебра $\mathfrak{B}^r \times \mathfrak{B}^s = \mathfrak{S}_{\mathfrak{B}^r \ast \mathfrak{B}^s}$ садржи $\mathfrak{B}^r \ast \mathfrak{B}^s$, а тиме и $\mathfrak{I}^r \ast \mathfrak{I}^s = \mathfrak{I}^{r+s}$, то закључујемо да важи и преостала инклузија $\mathfrak{B}_r \times \mathfrak{B}_s \supset \mathfrak{S}_{\mathfrak{I}^{r+s}} = \mathfrak{B}^{r+s}$. $\square$

ЛЕМА 4.34. *Ако је μ транслаторно инваријантна Borel-ова мера на $\mathbb{R}^r$, а ν транслаторно инваријантна Borel-ова мера на $\mathbb{R}^s$, тада је $\mu \times \nu$ транслаторно инваријантна Borel-ова мера на $\mathbb{R}^{r+s}$.*

$\triangle$ Из претходног става следи да је $\mu \times \nu$ заиста дефинисана на $\mathfrak{B}^{r+s}$, па је Borel-ова мера на $\mathbb{R}^{r+s}$. Ако је $x = (x_1, \cdots, x_r) \in \mathbb{R}^r$, $0_s = (0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^s$ и ако је $E \subset \mathbb{R}^{r+s}$ Borel-ов, онда је $(E + (x, 0_s))^y = x + E^y$ за свако $y \in \mathbb{R}^s$, па је

$$
\begin{aligned}
(\mu\times\nu)(E + (x, 0_s)) &= \int_{\mathbb{R}^r} \mu((E + (x + 0_s))^y)\, d\nu(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^r} \mu(E^y + x))\, d\nu(y) = \int_{\mathbb{R}^r} \mu(E^y)\, d\nu(y) = (\mu\times\nu)(E),
\end{aligned}
$$

а слично је и $(\mu\times\nu)(E + (0_r, y)) = (\mu\times\nu)(E)$ за свако $y = (y_1, \cdots, y_s) \in \mathbb{R}^s$. Одатле следи општи случај: за $z = (x, y) = (x, 0_s) + (0_r, y) \in \mathbb{R}^{r+s}$ имамо $(\mu\times\nu)(E + z) = (\mu\times\nu)(E + (x, 0_s) + (0_r, y)) = (\mu\times\nu)(E + (x, 0_s)) = (\mu\times\nu)(E)$. □

Теорема 4.35. ***Производ Lebesgue-ових мера m_r и m_s је Lebesgue-ова мера m_{r+s}.***

△ На основу претходног става, $m_r \times m_s$ је мера дефинисана на σ алгебри Borel-ових скупова у $\mathbb{R}^{r+s}$. На основу леме, $m_r \times m_s$ је транслаторно инваријантна мера, осим тога $(m_r \times m_s)([0,1)^{r+s}) = (m_r \times m_s)([0,1)^r \times [0,1)^s) = m_r([0,1)^r)m_s([0,1)^s) = 1$. С обзиром да је m_{r+s} јединствена транслаторно инваријантна мера таква да је $m_{r+s}([0,1)^{r+s}) = 1$, следи да је $m_r \times m_s = m_{r+s}$. □

Ова теорема нам омогућава да интеграцију у $\mathbb{R}^d$ по мери Lebesgue-а вршимо у произвољном поретку промењљивих. Следећа теорема нам каже да уведени интеграл у $\mathbb{R}^d$ заиста уопштава Riemann-ов интеграл.

Теорема 4.36. ***Нека је f Riemann интеграбилна реална функција на затвореном квадру $\overline{Q} = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d] \subset \mathbb{R}^d$. Тада је f и Lebesgue интеграбилна и вредности два интеграла су једнаке:***

$$
\int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_d}^{b_d} f(x_1, \cdots, x_d)\, dx_1 \cdots dx_d = \int_{\overline{Q}} f\, dm_d.
$$

△ Функције облика $s = \sum_{k=1}^{K} c_k \chi_{Q_k}$, где су Q_k основни квадри назовимо степенастим. За основни квадар $Q = \prod_{i=1}^{d} [a_i, b_i)$ одаберимо низ $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ подела квадра $\overline{Q} = \prod_{i=1}^{d} [a_i, b_i]$ такав да је P_{n+1} потподела поделе P_n за свако $n \in \mathbb{N}$ и да дијаметар поделе P_n тежи нули кад $n \to +\infty$. Нека су $Q_{k_n}^{(n)}$, $1 \le k_n \le K_n$ основни квадри произашли из поделе P_n, нека је $m_{k_n}^{(n)} = \inf\limits_{Q_{k_n}^{(n)}} f$, $M_{k_n}^{(n)} = \sup\limits_{Q_{k_n}^{(n)}} f$ и нека су степенасте функције g_n и G_n дефинисане са $g_n = \sum_{k_n=1}^{K_n} m_{k_n}^{(n)} \chi_{Q_{k_n}^{(n)}}$ и $G_n = \sum_{k_n=1}^{K_n} M_{k_n}^{(n)} \chi_{Q_{k_n}^{(n)}}$. С обзиром да је Lebesgue-ова мера m_d сваког основног квадра $\prod_{i=1}^{d} [c_i, d_i)$ у $\mathbb{R}^d$ једнака његовој d-димензионој запремини $\prod_{i=1}^{d} (d_i - c_i)$, то је доња Darboux [5]ова сума s_n функције f у односу на поделу P_n једнака Lebesgue-овом интегралу $\int_Q g_n\, dm_d$, слично је и горња Darboux-ова сума S_n функције f у односу на поделу P_n једнака $\int_Q G_n\, dm_d$. Низ степенастих функција g_n (G_n) је растући (опадајући) јер је P_{n+1} потподела од P_n за свако $n \in \mathbb{N}$,

[5] Дарбу– Jean Gaston Darboux (1842–1917)

па имамо да $g_n \uparrow g$ и $G_n \downarrow G$, где су g и G мерљиве. Из Riemann интеграбилности функције f следи да $\int_Q g_n\,dm_d \uparrow I$ и $\int_Q G_n\,dm_d \downarrow I$, где је са I означен Riemann-ов интеграл функције f на $\overline{Q}$. Из теореме о доминантној конвергенцији (функције g_n и G_n су равномерно ограничене јер је f ограничена) следи да је $I = \lim_{n\to\infty} \int_Q g_n\,dm_d = \int_Q g\,dm_d$ и $I = \lim_{n\to\infty} \int_Q G_n\,dm_d = \int_Q G\,dm_d$. Дакле, $\int_Q (G-g)\,dm_d = 0$, но $G-g \geq 0$ па је $g = G$ скоро свуда на Q. С обзиром да је $g \leq f \leq G$ на Q, следи да је f скоро свуда једнака Lebesgue интеграбилној функцији g на Q, а тиме и на $\overline{Q}$ јер је $m_d(\overline{Q} \setminus Q) = 0$. Одакле непосредно следи тражено $\int_{\overline{Q}} f\,dm_d = \int_{\overline{Q}} g\,dm_d = \int_Q g\,dm_d = I$. □